Irrazionalità del numero di Nepero e

Lemma 1 Vale la seguente disuguaglianza

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{(q+1)!}\,\frac{q+2}{q+1}\,, \qquad \forall\, q \in \mathbb{N}_0\,. \tag{1}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned}\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(q+1)!}\Big(1+\frac{1}{q+2}+\frac{1}{(q+3)(q+2)}+\cdots\Big)\\ &< \frac{1}{(q+1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(q+2)^k}\\ &= \frac{1}{(q+1)!}\,\frac{q+2}{q+1}\,. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Teorema 1 $e \notin \mathbb{Q}$.

Dimostrazione Per il Teorema 5.3 si ha che

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\,. \tag{2}$$

Supponiamo per assurdo che $e = p/q$ con $p, q \in \mathbb{N}$. Allora, si avrebbe

$$N := q!\Big(e - \sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}\Big) = q!\Big(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}\Big) = p\,(q-1)! - \sum_{k=0}^{q}\frac{q!}{k!} \in \mathbb{Z}\,,$$

e, d'altra parte,

$$N \overset{(2)}{=} q! \sum_{k=q+1}^{\infty}\frac{1}{k!} \overset{(1)}{<} \frac{q+2}{(q+1)^2} < 1\,,$$

il che, essendo $N > 0$, è una contraddizione, non esistendo alcun numero intero in $(0, 1)$. $\blacksquare$

Irrazionalità di π

La seguente è forse la dimostrazione più semplice dell'irrazionalità di[1] π. Cominciamo con un lemma preparatorio.

Lemma 2 *Dati $p, q, n \in \mathbb{N}$, sia $r = p/q \in \mathbb{Q}$ e sia P il seguente polinomio di grado[2] $2n$:*

$$P(x) = \frac{x^n (p-qx)^n}{n!}\,. \tag{3}$$

(i) *P soddisfa le seguenti relazioni*

$$P(r-x) = P(x)\,, \quad \forall\, x\,; \qquad D^j P(r) = (-1)^j D^j P(0) \in \mathbb{Z}\,, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0\,; \tag{4}$$

$$P(x) \le \frac{(qr^2/4)^n}{n!}\,, \quad \forall\, x\,; \qquad P(x) > 0\,, \quad \forall\, 0 < x < r\,. \tag{5}$$

(ii) *Sia $Q := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k D^{2k} P$. Allora $Q(0) + Q(r) =: m \in \mathbb{Z}$ e, per ogni x,*

$$Q'' + Q = P\,, \qquad \Big(Q' \sin x - Q \cos x\Big)' = P \sin x\,. \tag{6}$$

[1] Cfr. https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_that_%CF%80_is_irrational.
[2] D denota la derivata rispetto a x.

Dimostrazione (i) La prima relazione in (4) segue immediatamente dalla definizione date. Per la formula del binomio di Newton si ha che

$$P(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} m_k x^{n+k}\,, \qquad m_k \in \mathbb{Z}\,,$$

da cui segue[3]

$$D^j P(0) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } 0 \le j < n\,,\ \text{ o se } j > 2n\,, \\ \frac{j!}{n!}\, m_{j-n} \in \mathbb{Z} & \text{se } n \le j \le 2n\,, \end{cases} \tag{7}$$

e quindi (essendo $j!/n! \in \mathbb{N}$ per ogni $j \ge n$) $D^j P(0) \in \mathbb{Z}$ per ogni j. Per la prima relazione in (4) si ha che $D^j P(r) = (-1)^j D^j P(0) \in \mathbb{Z}$ che completa la dimostrazione di (4).
Le relazioni in (5) seguono subito osservando che $P = \big(x(p-qx)\big)^n/n!$ e che $x(p-qx) = qx(r-x)$ è una parabola che si annulla in 0 e $r = p/q$ e massimo in $r/2 = p/(2q)$.
(ii) Dalla definizione di Q e da (4) segue immediatamente che $m := Q(0) + Q(r) \in \mathbb{Z}$.
Per (7), $D^{2n+2}P = 0$, e dunque:

$$Q'' = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k D^{2k+2}P = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k D^{2k+2}P = -\sum_{h=1}^{n}(-1)^h D^{2h}P = -Q + P\,.$$

che è equivalente alla prima relazione in (6); la seconda relazione segue immediatamente dalla prima. ∎

Teorema 2 $\pi \notin \mathbb{Q}$.
Dimostrazione Supponiamo, per assurdo, che $\pi = p/q =: r \in \mathbb{Q}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ e siano P e Q come nel Lemma 2. Dal Teorema Fondamentale del Calcolo segue che

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} P(x)\sin x \ &\overset{(6)}{=}\ \int_0^{\pi}\Big(Q'\sin x - Q\cos x\Big)' \\ &=\ \Big[Q'\sin x - Q\cos x\Big]_0^{\pi} = Q(\pi) + Q(0) = m\,, \end{aligned} \tag{8}$$

con $m \in \mathbb{Q}$ per il punto (ii) del Lemma 2. Da (5), segue che $P\sin x$ è una funzione (continua) e strettamente positiva su[4] $(0,\pi)$ e quindi $m > 0$. Ma allora, usando la prima stima in (5), per n sufficientemente grande, avremmo

$$0 < m = \int_0^{\pi} P\sin x \le \pi\,\frac{(q\pi^2/4)^n}{n!} < 1\,,$$

ma questo contraddice il fatto che $m \in \mathbb{Q}$ e quindi l'assunzione che $\pi \in \mathbb{Q}$ è falsa. ∎

Irrazionalità di e^x con $x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$

Teorema 3 *Per ogni* $x \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $e^x \notin \mathbb{Q}$.

Dimostrazione[5] Sia $x = h/k \in \mathbb{Q}$. Se e^x fosse razionale lo sarebbe anche $(e^x)^k = e^h$; se e^h fosse razionale con h intero negativo lo sarebbe anche $1/e^h = e^{-h}$. È quindi sufficiente

[3] $D^j x^m = \frac{m!}{j!}x^{m-j}$ se $0 \le j \le m$ e $D^j x^m = 0$ per ogni $j > m$, quindi $D^j x^m|_{x=0} = j!$ se $j = m$ e 0 altrimenti.

[4] Si noti che questo fatto segue dalla definizione analitica di π come primo zero del coseno, dalla formula di addizione del coseno, che implica a sua volta la relazione $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$.

[5] La dimostrazione è dovuta a C. Hermite.

dimostrare che $e^h \notin \mathbb{Q}$ con $h \in \mathbb{N}$.
Fissiamo $h \in \mathbb{N}$ e assumiamo, per assurdo, che $e^h = a/b$ con a e b numeri naturali. Dato $n \in \mathbb{N}$, sia P come nel Lemma 2 con $p = q = 1$ e definiamo

$$F := \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j h^{2h-j} P^{(j)} .$$

Per (7), $D^{2n+1}P = 0$, e dunque

$$\begin{aligned} F' &= \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j h^{2n-j} P^{(j+1)} = \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^j h^{2n-j} P^{(j+1)} = -h \sum_{j=1}^{2n} (-1)^j h^{2n-j} P^{(j)} \\ &= -h(F - h^{2n}P) = -hF + h^{2n+1}P , \end{aligned}$$

o, equivalentemente

$$hF + F' = h^{2n+1}P .$$

Da tale relazione segue immediatamente che

$$D\big(e^{hx}F(x)\big) = e^{hx}\big(hF(x) + F'(x)\big) = h^{2n+1}e^{hx}P(x) . \tag{9}$$

Da (7) e dalla definizione di F segue anche che $F(0)$ e $F(1)$ sono numeri interi, e, per il Teorema Fondamentale del Calcolo, ricordando l'assunzione $e^h = a/b$, segue

$$b\int_0^1 h^{2n+1}e^{hx}P(x)dx \overset{(9)}{=} b\int_0^1 D\big(e^{hx}F(x)\big)dx = b\big[e^{hx}F(x)\big]_0^1 = aF(1) - bF(0) =: m \in \mathbb{Z} .$$

Ma da (5) segue anche, per n sufficientemente grande, che

$$0 < b\int_0^1 h^{2n+1}e^{hx}P(x)dx < \frac{ah(h/2)^{2n}}{n!} < 1 ,$$

il che contraddice $m \in \mathbb{Z}$. ∎

Osservazione (Irrazionalità di $\log x$ con $x \in \mathbb{Q}_+$) *Se $x \in \mathbb{Q}_+$, allora $\log x \notin \mathbb{Q}$.*
Infatti se fosse $\log x \in \mathbb{Q}$ con $x \in \mathbb{Q}_+$, si avrebbe che $x = e^{\log x} \in \mathbb{Q}$ che contraddice il Teorema 3. ∎